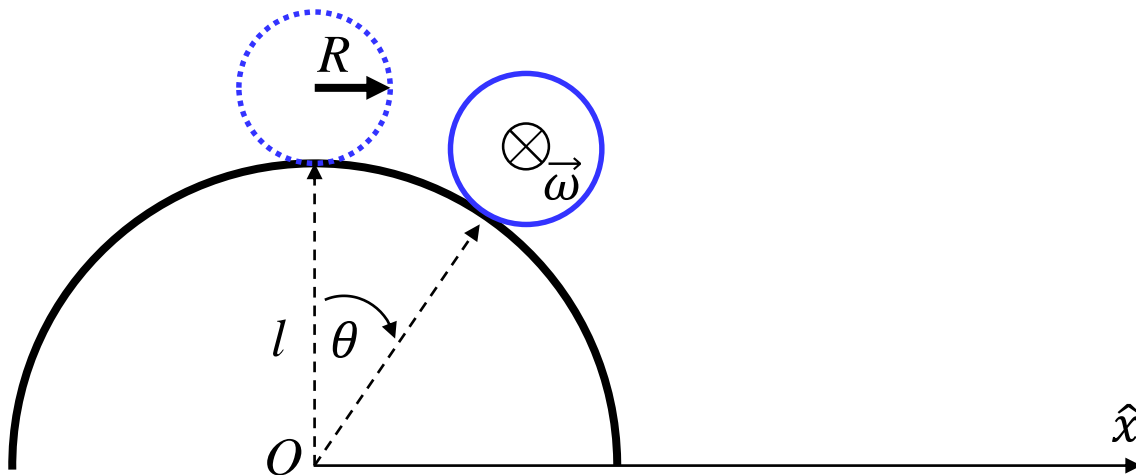


**Exo 1:** Un cylindre creux de masse  $m$ , longueur  $L$ , rayon  $R$  et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon  $l$ , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ( $\theta = 0$ ), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle  $\theta$ , tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air.

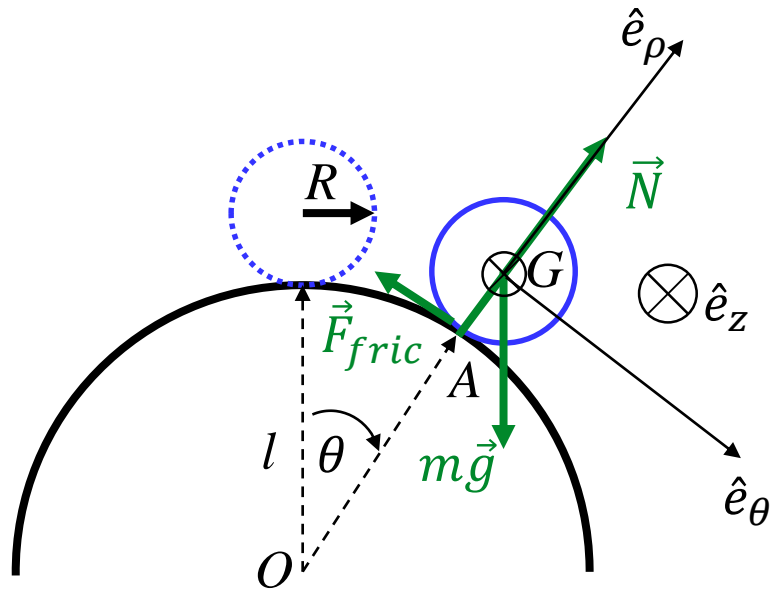
1. Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma, pour la position  $\theta > 0$ .
2. Calculez l'angle critique de décollage  $\theta_c$
3. Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon  $\theta$ , pour  $\theta < \theta_c$  (c'est-à-dire pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de  $R$ ,  $l$  et  $g$ .
4. En assumant que  $l \gg R$ , déterminez la distance  $x$  du point d'impact du cylindre avec le sol par rapport à  $O$



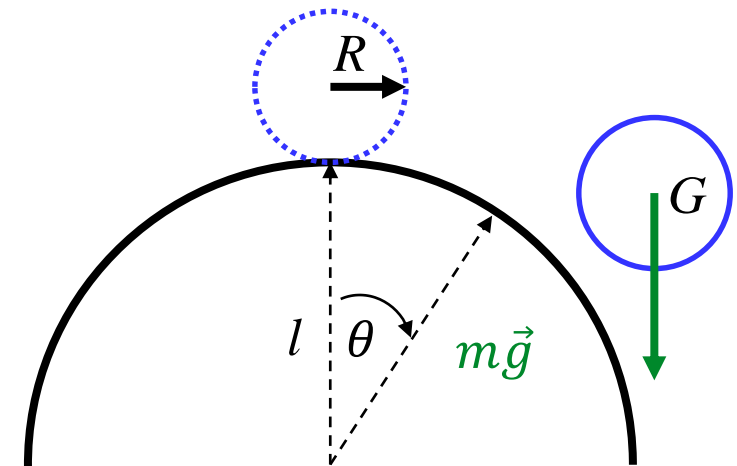
Un cylindre creux de masse  $m$ , longueur  $L$ , rayon  $R$  et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon  $l$ , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ( $\theta = 0$ ), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle  $\theta$ , tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air.

1. Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma, pour la position  $\theta > 0$ .

Avant décolllement



Après décolllement



## 2. Calculez l'angle critique de décollage $\theta_c$

— Condition pour le « décollage » :  $N = 0$

— Newton selon  $\hat{e}_\rho$  :

$$-m(l+R)\dot{\theta}_c^2 = -mg \cos \theta_c + N \Rightarrow \dot{\theta}_c^2 = \frac{g \cos \theta_c}{l+R}$$

— Conservation de l'énergie mécanique pour exprimer  $\dot{\theta}_c^2 = f(\theta)$  :

Équation de liaison entre  $\omega$  et  $\dot{\theta}$ . En notant A le point de contact du cylindre creux :

$$v_{G,A} = \omega R$$

$$v_{G,O} = (R+l)\dot{\theta}, \quad v_{G,O} = v_{G,A} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{(R+l)\dot{\theta}}{R}$$

Énergie potentielle :

$$E_p = mgh_{cm} = mg(l+R)(\cos \theta - 1)$$

(ici choisie telle que  $E_p(\theta = 0) = 0$ )

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m((l+R)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{l+R}{R}\dot{\theta}\right)^2 = m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = mg(l+R)(\cos \theta - 1) + m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

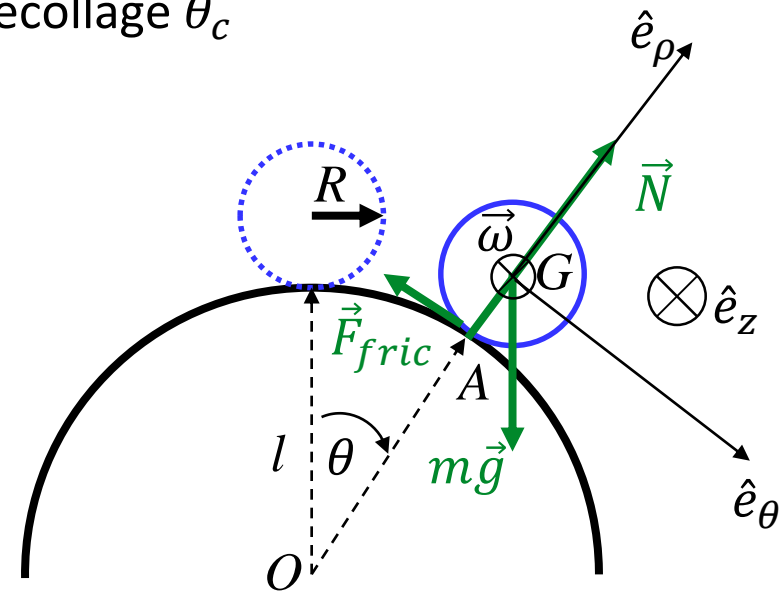
$$E_m = cte = E_m(\theta = 0) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g(1 - \cos \theta)}{l+R}$$

Finalement :

$$\dot{\theta}_c^2 = \frac{g \cos \theta_c}{l+R}$$

avec

$$\dot{\theta}_c^2 = \frac{g(1 - \cos \theta_c)}{l+R} \Rightarrow \frac{g(1 - \cos \theta_c)}{l+R} = \frac{g \cos \theta_c}{l+R} \Rightarrow \cos \theta_c = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_c = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$



$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{e}_z$$

3. Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon  $\theta$ , pour  $\theta < \theta_c$  (c'est-à-dire pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de  $R$ ,  $l$  et  $g$ .

— Newton : selon  $\vec{e}_\theta$  :  $m(l + R)\ddot{\theta} = mg \sin \theta - F_{fric}$

— Theoreme du moment cinetique au centre de masse :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = RF_{fric}\hat{e}_z \Rightarrow mR^2\dot{\omega}\hat{e}_z = RF_{fric}\hat{e}_z \Rightarrow m(l + R)\ddot{\theta} = mg \sin \theta - mR\dot{\omega}$$

Avec l'équation de liaison :

$$\omega = \frac{(R + l)\dot{\theta}}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{l + R}{R}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l + R)} \sin \theta$$

— Autre Méthode : On peut appliquer le théorème du moment cinétique en A (car  $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_{cm}$ )

Theoreme du moment cinetique en A :

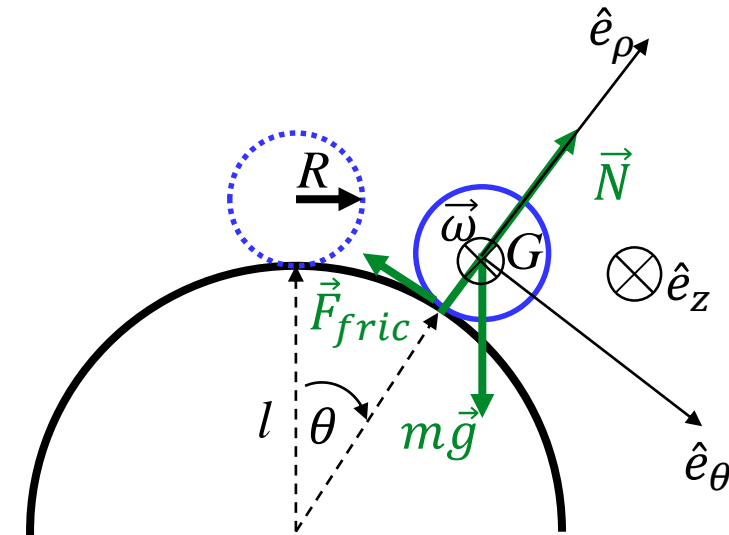
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,mg} \Rightarrow I_A\dot{\omega}\vec{e}_z = Rmg \sin \theta \vec{e}_z$$

Avec Steiner :

$$I_A = mR^2 + I_{cm} = 2mR^2 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{2R} \sin \theta$$

Et avec l'équation de liaison :

$$\dot{\omega} = \frac{l + R}{R}\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{l + R}{R}\ddot{\theta} = \frac{g}{2R} \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l + R)} \sin \theta$$



4. En assumant que  $l \gg R$ , déterminez la distance  $x$  du point d'impact du cylindre avec le sol par rapport à  $O$

$$\dot{\theta}_c = \sqrt{\frac{g \cos \theta_c}{l + R}} = \sqrt{\frac{g}{2(l + R)}} \approx \sqrt{\frac{g}{2l}}$$

$$\dot{\vec{r}}_c = (l + R)\dot{\theta}_c \hat{e}_\theta \approx l\dot{\theta}_c (\cos \theta_c \hat{x} - \sin \theta_c \hat{y}) = \sqrt{\frac{gl}{2}} \left( \frac{1}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{y} \right)$$

Eqs. du mouvement après décollage par rapport à  $O\hat{x}\hat{y}$

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{gl}{8}}$$

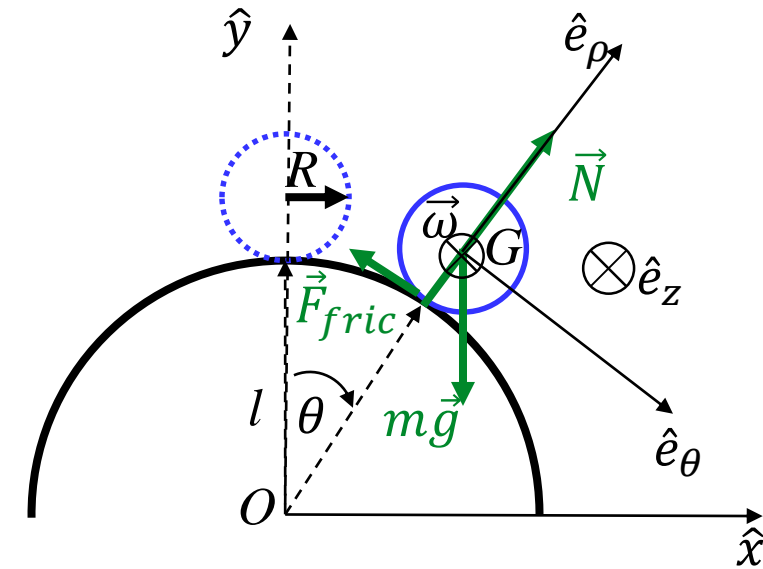


$$x = (l + R) \sin \theta_c + \sqrt{\frac{gl}{8}} t \approx l \sin \theta_c + \sqrt{\frac{gl}{8}} t$$

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \dot{y} = -gt - \sqrt{\frac{3gl}{8}} \Rightarrow y = (l + R) \cos \theta_c - \frac{1}{2}gt^2 - \sqrt{\frac{3gl}{8}} t \approx \frac{l}{2} - \frac{1}{2}gt^2 - \sqrt{\frac{3gl}{8}} t$$

Point d'impact pour  $y(t^*) = 0 \Rightarrow gt^2 + \sqrt{\frac{3gl}{2}} t - l = 0 \Rightarrow t = \frac{-\sqrt{\frac{3gl}{2}} \pm \sqrt{\frac{3gl}{2} + 4gl}}{2g}$

$$t^* = \sqrt{\frac{l}{8g}} (-\sqrt{3} + \sqrt{11}) \Rightarrow x(t^*) = l \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{l}{8} (-\sqrt{3} + \sqrt{11}) = \frac{l}{8} (3\sqrt{3} + \sqrt{11})$$

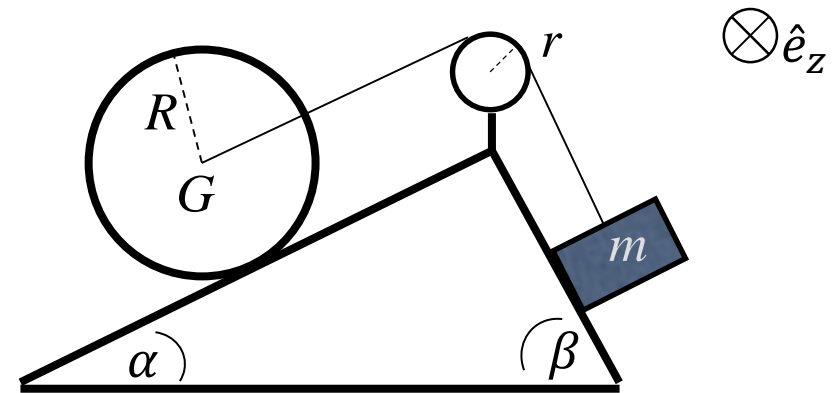


$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{e}_z \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{e}_z \end{aligned}$$

**Exo 2:** Dans le montage suivant, on considère un double plan incliné. À gauche une roue, de masse  $M$ , rayon  $R$  et moment de inertie  $I_{Gz}$  par rapport à  $G$ , qui roule sans glisser. À droite, une masse  $m$  glisse sur le plan. Dans un premier temps, on néglige les frottements entre la masse  $m$  et le plan. Les deux objets sont reliés par une corde sans masse et inextensible qui passe sans glisser sur une poulie, de masse  $M_p$ , de rayon  $r$ , et de moment d'inertie  $I_{pz}$  par rapport à son axe, située au sommet du double plan. Au niveau de la roue, la corde est fixée à l'axe de la roue.

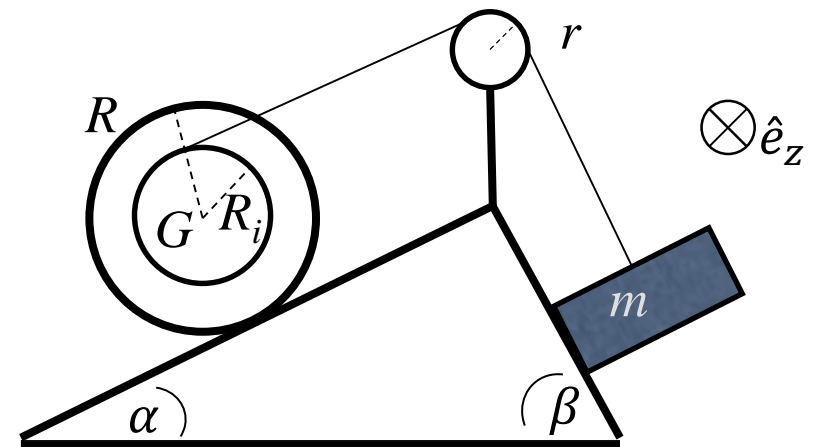
On lâche le système sans vitesse initiale et on le regarde évoluer.

1. Calculer  $M_I$ , valeur particulière de  $M$ , pour que le système reste immobile.
2. Exprimer l'énergie mécanique du système en mouvement en fonction des données ainsi que de la vitesse  $\dot{x}$  et de la position  $x$  de la masse  $m$  se déplaçant le long du plan de droite.
3. Exprimer l'accélération de la masse  $m$ .



Maintenant, la roue est remplacée par un rouleau de fil sans masse qui a le même moment d'inertie  $I_{Gz}$  par rapport à  $G$ , la même masse  $M$ , et le même rayon  $R$ . Le fil s'enroule comme indiqué sur le dessin autour du cylindre intérieur de diamètre  $R_i$ . De plus, la masse  $m$  subit des frottements secs de coefficient statique  $\mu_s$  et dynamique  $\mu_c$  avec le plan incliné. On remplace la poulie en haut du plan incliné par une poulie de masse négligeable.

4. Représenter sur le schéma les forces s'appliquant sur le rouleau et sur la masse  $m$ .
5. Dans quel intervalle de valeurs se trouve  $M$  pour que le système lâché sans vitesse initiale reste immobile ?
6. On suppose  $M$  inférieure à la valeur minimale trouvée précédemment. Exprimer l'accélération de  $m$ .



# 1. Calculer $M_I$ , valeur particulière de $M$ , pour que le système reste immobile.

## 1. Forces exercées sur le système :

— sur la roue :  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$ ,  $M\vec{g}$ ,  $\vec{F}_F$

— sur la masse  $\vec{T}$ ,  $\vec{R}_m$ ,  $m\vec{g}$  (pas de frottements)

→ sur la roue :  $\sum \vec{M}_A = \vec{0}$  permet de se débarrasser de  $\vec{F}_F$

$$\vec{A}\vec{A} \wedge \vec{N} + \vec{A}\vec{A} \wedge \vec{F}_F + \vec{A}\vec{O} \wedge M\vec{g} + \vec{A}\vec{O} \wedge \vec{T}_1 = \vec{0}$$

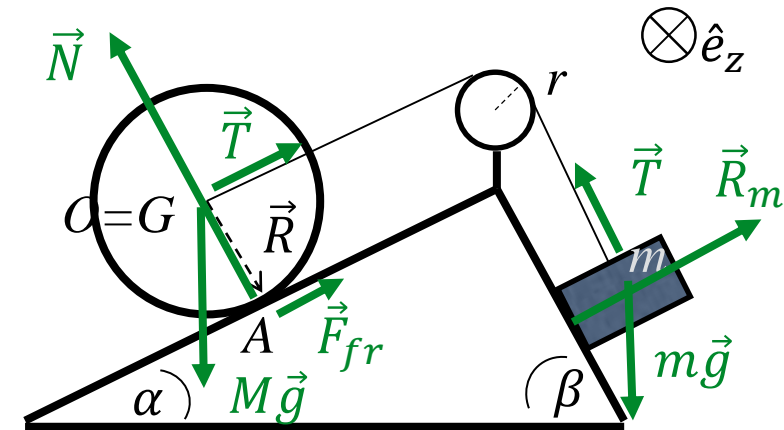
$$(R M g \sin \alpha) \vec{e}_z - (R T_1) \vec{e}_z = \vec{0} \Rightarrow T_1 = M g \sin \alpha$$

Sur  $\vec{m}$  (projeté sur le plan) :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_m + \vec{T} + m\vec{g} = 0$$

$$T_4 - m g \sin \beta = 0$$

$$T_1 = T_4 \Rightarrow M g \sin \alpha = m g \sin \beta \Rightarrow M_I = m \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$



De façon équivalente on peut aussi écrire que:

- Projection parallèle au plan d'angle  $\beta$ :  $ma = T - m g \sin \beta = 0 \quad \rightarrow T = m g \sin \beta$
- Projection parallèle au plan d'angle  $\alpha$ :  $ma = T + F_{fr} - M_I g \sin \alpha = 0 \quad \rightarrow T = M_I g \sin \alpha$
- Théorème du moment cinétique par rapport à G de la roue:  $\vec{M}_G = \vec{R} \wedge \vec{F}_{fr} = R F_{fr} = 0 \quad \rightarrow F_{fr} = 0$

$$M_I g \sin \alpha = m g \sin \beta$$

2. Exprimer l'énergie mécanique du système en mouvement en fonction des données ainsi que de la vitesse  $\dot{x}$  et de la position  $x$  de la masse  $m$  se déplaçant le long du plan de droite.

$$\text{Roue: } Mgx \sin \alpha + \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{GZ} \omega^2$$

$$\text{Poulie: } \frac{1}{2} I_{PZ} \Omega^2$$

$$\text{Masse: } -mgx \sin \beta + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\text{On a aussi que: } v_G = \dot{x}, \quad \omega = \frac{v_G}{R} = \frac{\dot{x}}{R}, \quad \Omega = \frac{\dot{x}}{r}$$

$$E = Mgx \sin \alpha - mgx \sin \beta + \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left( \frac{I_{GZ}}{R^2} + \frac{I_{PZ}}{r^2} \right)$$

3. Exprimer l'accélération de la masse  $m$ .

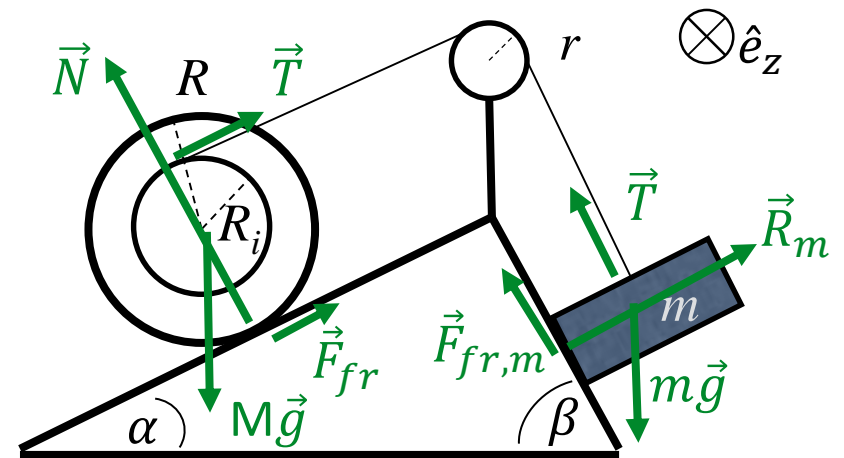
La force poids est conservative, les deux forces de réactions ne font pas de travail parce que perpendiculaire au déplacement, la friction ne travaille pas parce que la vitesse du point de contact est nulle, les deux tensions font un travail égal mais opposé, donc l'énergie mécanique est conservée

$$\frac{dE}{dt} = (Mg \sin \alpha - mg \sin \beta) \dot{x} + (M + m) \dot{x} \ddot{x} + \left( \frac{I_{GZ}}{R^2} + \frac{I_{PZ}}{r^2} \right) \dot{x} \ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = \frac{(Mg \sin \alpha - mg \sin \beta)}{M + m + \frac{I_{GZ}}{R^2} + \frac{I_{PZ}}{r^2}}$$

Maintenant, la roue est remplacée par un rouleau de fil sans masse qui a le même moment d'inertie  $I_{Gz}$  par rapport à  $G$ , la même masse  $M$ , et le même rayon  $R$ . Le fil s'enroule comme indiqué sur le dessin autour du cylindre intérieur de diamètre  $R_i$ . De plus, la masse  $m$  subit des frottements secs de coefficient statique  $\mu_s$  et dynamique  $\mu_c$  avec le plan incliné. On remplace la poulie en haut du plan incliné par une poulie de masse négligeable.

4. Représenter sur le schéma les forces s'appliquant sur le rouleau et sur la masse  $m$ .



5. Dans quel intervalle de valeurs se trouve  $M$  pour que le système lâché sans vitesse initiale reste immobile ?

La masse  $m$  peut être à la limite de

$$1) \text{ descendre: } T + F_{fr} - mg \sin \beta = 0 \rightarrow T = mg \sin \beta - \mu_s mg \cos \beta$$

$$2) \text{ ou remonter: } T - F_{fr} - mg \sin \beta = 0 \rightarrow T = mg \sin \beta + \mu_s mg \cos \beta$$

Au niveau de la roue, par rapport au point de contact A, pour le moment des forces  $M_A$  on a dans les deux cas que :

$$M_A = (R + R_i)T - MgR \sin \alpha = 0 \rightarrow T = \frac{MgR \sin \alpha}{R + R_i}$$

En remplaçant T dans les eqs 1) et 2), on trouve

$$mg(\sin \beta - \mu_s \cos \beta) < \frac{MgR \sin \alpha}{R + R_i} < mg(\sin \beta + \mu_s \cos \beta)$$



$$m(\sin \beta - \mu_s \cos \beta) \frac{R + R_i}{R \sin \alpha} < M < m(\sin \beta + \mu_s \cos \beta) \frac{R + R_i}{R \sin \alpha}$$

6. On suppose  $M$  inférieure à la valeur minimale trouvée précédemment. Exprimer l'accélération de  $m$ .

Il s'agit du cas 1) avec la masse  $m$  qui descende

$$m\ddot{x} = -T - F_{fr} + mg \sin \beta = -T - \mu_c mg \cos \beta + mg \sin \beta \quad (1)$$

Au niveau de la roue, par rapport au point de contact A, le moment des forces  $M_A$  est donné par:

$$\vec{M}_A = ((R + R_i)T - MgR \sin \alpha) \hat{z} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} = (I_{Gz} + MR^2) \dot{\omega} \hat{z}$$

$$\dot{x} = \omega(R + R_i) \rightarrow \ddot{x} = \dot{\omega}(R + R_i)$$

$$(R + R_i)T - MgR \sin \alpha = (I_{Gz} + MR^2) \frac{\ddot{x}}{(R + R_i)} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow T = -m\ddot{x} - \mu_c mg \cos \beta + mg \sin \beta$$

$$(2) \Rightarrow (R + R_i)(-\mu_c mg \cos \beta + mg \sin \beta) - MgR \sin \alpha = (I_{Gz} + MR^2) \frac{\ddot{x}}{(R + R_i)} + m\ddot{x}(R + R_i)$$

$$\ddot{x} = g \frac{(R + R_i)(-\mu_c m \cos \beta + m \sin \beta) - MR \sin \alpha}{\frac{I_{Gz} + MR^2}{(R + R_i)} + m(R + R_i)}$$